

Posudok oponenta na habilitačnú prácu RNDr. Vladimíra Špitalského, PhD.

DYNAMICS ON ONE DIMENSIONAL CONTINUA: MINIMAL SETS,
TRANSITIVITY AND ENTROPY.

Predložená práca nadväzuje na dlhoročný výskum autora v oblasti diskretných dynamických systémov. Problematika sa pôvodne začala intenzívne rozvíjať pre jednorozmerné systémy generované spojitými zobrazeniami intervalu do seba. Ukázalo sa, že aj pri skúmaní takýchto zdanlivo jednoduchých zobrazení vznikajú netriviálne problémy, dnes je to veľmi podrobne analyzovaná oblasť a záujem sa presúva na spojité zobrazenia komplikovanejších priestorov do seba. Tu je zaujímavé rozoberať možné situácie, ktoré dynamika zobrazení na danom priestore pripúšťa. Touto cestou sa uberá aj predložená práca, skúma diskretné dynamické systémy na jednorozmerných kontinuách. Aktuálnosť problematiky je vysoká, svedčí o tom veľký počet prác publikovaných v uvedenej oblasti, ako aj odozva na už publikované práce autora a prezentácie výsledkov na domácich aj medzinárodných konferenciách. Autor publikoval v tejto oblasti ako autor alebo spoluautor 9 prác v uznávaných matematických časopisoch, ďalšie práce sú zadané do tlače. Habilitačná práca je súborom piatich článkov [1] - [5], z ktorých dva sú publikované so spoluautormi a tri sú samostatné.

Problematiku práce rozdelil autor do dvoch oblastí výskumu. Prvá oblasť obsahuje dve práce, v ktorých sa autor so spoluautormi venuje topologickej charakterizácii minimálnych priestorov a množín. Systém (X, f) je minimálny, ak neexistuje vlastná neprázdna uzavretá a f -invariantná podmnožina množiny X . Pri analýze tohto problému hrá úlohu počet maximálnych súvislých podmnožín, t.j. komponentov X . Priestor X je takmer totálne nesúvislý, ak množina všetkých degenerovaných komponentov je hustá v X . V práci [1] autori dokazujú, že takýto priestor pripúšťa minimálne zobrazenie práve vtedy, ak je konečný alebo neobsahuje izolované body. Ako dôsledok autori uvádzajú charakterizáciu minimálnych množín na dendritoch a lokálnych dendritoch. Dendrit je lokálne suvislé kontinuum, ktoré neobsahuje jednoduchú uzavretú krivku. V druhej práci [2] zaradenej autorom do tohto celku sa autori zaoberajú problémom charakterizácie minimality na kompaktných metrizovateľných priestoroch obsahujúcich voľný interval, t.j. otvorenú podmnožinu homeomorfnú s otvoreným intervalom $(0, 1)$. Ukazuje sa, že ak na takomto priestore existuje minimálne zobrazenie, tak priestor je disjunktným zjednotením konečne veľa kružníc, ktoré f cyklicky permutuje a na každej z nich je f^n topologicky konjugovaná s tou istou iracionálnou rotáciou. Ďalej článok dáva nutné podmienky na to, aby podmnožina priestoru, ktorá má neprázdny prienik s voľným intervalom bola minimálnou podmnožinou.

Druhá oblasť súvisí s problematikou tranzitívnosti a topologickej entropie. Študuje vzťahy medzi entropiou a inými vlastnosťami dynamického systému. Z práce [2] okrem už spomenutých výsledkov vyplýva, že ak dendrit X obsahuje voľný interval, tak každé tranzitívne zobrazenie na X má kladnú topologickú entropiu. Problém charakteru infima topologických entropií tranzitívnych zobrazení dendritu X viedol autora ku konštrukcii tzv. LEL zobrazení na totálne regulárnych kontinuách v práci [3]. Tieto možno chápať ako zovšeobecnenie zobrazení typu stan, ktoré sa často používajú v topologickej dynamike intervalu. Využitie týchto LEL zobrazení je v práci [3] ilustrované pri konštrukcii tranzitívneho zobrazenia s malou entropiou na ω hviezde. Z článku okrem iného ako dôsledok vyplýva, že na každom totálne regulárnom kontinuu existuje

exaktné zobrazenie chaotické v zmysle Devaneyho s konečnou kladnou entropiou a vlastnosťou špecifikácie. V práci [4] autor zaviedol pojem P -Lipschitzovského zobrazenia. Takéto zobrazenia možno charakterizovať k ticou Lipschitzových konštánt a maticou prechodu zobrazenia, pomocou ktorých autor dostáva horné ohraničenie entropie zobrazenia. Ako dôsledok ďalej dostáva, že na nedegenerovanom totálne regulárnom kontinuu (za istých predpokladov) existujú exaktné zobrazenia chaotické v zmysle Devaneyho s ľubovoľne malou kladnou entropiou. Ďalšie možné použitie tried P -Lipschitzovských a LEL zobrazení je dané v práci [5], kde sa zaoberá charakterom infima topologických entropií tranzitívnych resp. exaktne Devaneyho chaotických zobrazení na nedegenerovaných dendritoch, ktoré nie sú stromy. Použitím výsledku z [4] dostáva, že ak X je nedegenerované úplne regulárne kontinuum, ktoré nie je strom, tak tieto infimá sú rovné nule. Ďalej tu autor získava horný odhad entropie exaktných chaotických v zmysle Devaneyho zobrazení na dendrite s voľnou úsečkou.

Výsledky habilitačnej práce vychádzajú z najnovších poznatkov topologickej dynamiky na jednorozmerných kontinuu, úvod práce poskytuje naozaj detailný prehľad aktuálneho stavu problematiky, východísk autorovho výskumu, ako aj niektoré možné smery ďalšieho výskumu. Jednotlivé práce vznikli riešením otázok, ktoré vyplývajú z prác alebo boli priamo sformulované špičkovými odborníkmi pracujúcimi v tejto oblasti. Klasifikácia kompaktných metrických priestorov, na ktorých existujú minimálne zobrazenia je známym otvoreným problémom topologickej dynamiky. Príspevkom k tejto problematike je nepochybne práca [1]. V tejto práci bola napríklad čiastočne (pre dendrity s voľným intervalom) vyriešená aj otázka sformulovaná S. Baldwinom v [6]. Výsledky prác [3], [4], [5] boli tiež motivované problémami formulovanými pre dendrity S. Baldwinom v r. 2001, ale okrem toho, že poskytujú čiastočné odpovede na tieto otvorené problémy, dávajú výsledky aj pre iné priestory a boli v nich aplikované zaujímavé metódy a postupy. Napríklad v práci [3] je veľmi užitočná konštrukcia LEL zobrazení na úplne regulárnych kontinuu a v práci [4] zavedenie P -Lipschitzovských zobrazení, modifikácie ktorých môžu byť použité aj pri iných problémoch.

Záver: Podľa môjho názoru sa jedná o veľmi kvalitnú prácu, ktorá predstavuje významný prínos k teórii diskretných dynamických systémov na jednorozmerných kontinuu, o čom svedčia aj odozvy na práce autora v prácach iných odborníkov. Preto navrhujem, aby RNDr. Vladimírovi Špitalskému, PhD. bol udelený titul docent v študijnom odbore 9.1.1 Matematika.

Referencie

- [1] F. Balibrea, T. Downarowicz, R. Hric, Ľ. Snoha, V. Špitalský, Almost totally disconnected minimal systems, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 29(2009), no.3, 737-766.
- [2] M. Dirbák, Ľ. Snoha, V. Špitalský, Minimality, transitivity, mixing and topological entropy on spaces with a free interval, *Ergodic Theory Dynam. Systems* (2012).
- [3] V. Špitalský, Length expanding Lipschitz maps on totally regular continua, submitted(2012).
- [4] V. Špitalský, Entropy and exact Devaney chaos on totally regular continua, *Discrete Contin.*

Dyn. Syst. 33(2013), 3135-3152.

[5] V. Špitalský, Entropy of transitive dendrite maps, submitted (2012).

[6] S. Baldwin, Entropy estimates for transitive maps on trees, Topology 40 (2001), no.3, 551-569.

V Bratislave, 19.2.2013

doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.